

## Naissance de la convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse soumise à des flux de chaleur et de masse

Manuel Marcoux, Mohammad Karimi-Fard, Marie-Catherine Charrier-Mojtabi\*

*Institut de mécanique des fluides de Toulouse, UMR CNRS/INP/UPS N° 5502, UFR-MIG, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France*

(Reçu le 18 mars 1998, accepté le 3 décembre 1998)

*Abridged English version at the end of the text*

**Abstract — Onset of double-diffusive convection in a rectangular porous cavity submitted to heat and mass fluxes at the vertical walls.** We studied the onset of double-diffusive convection in a rectangular cell filled with a porous medium saturated with a binary fluid. Uniform heat and mass fluxes are applied to the vertical walls while the horizontal walls are impermeable and adiabatic. When the ratio of resulting solutal to thermal buoyancy forces is equal to  $-1$ , we obtain a purely diffusive regime (motionless). We demonstrate that this regime is linearly stable while the thermal Rayleigh number is lower than a critical value,  $Ra_c$ , depending of the aspect ratio of the cell,  $A$ , and the Lewis number,  $Le$ . For a square cavity, we obtained  $Ra_c|Le - 1| = 209.84$  and for an infinite layer, the critical parameters are found to satisfy  $Ra_c|Le - 1| = 105.33$  with a wavenumber  $k_c = 2.51$ . These analytical results are in good agreement with direct numerical simulations. These numerical simulations show that subcritical solutions disappear for a thermal Rayleigh number  $R_0 < Ra_c$ , which depends on the aspect ratio of the cell and the Lewis number. For thermal Rayleigh numbers lower than  $R_0$ , only the purely diffusive solution is stable. © Elsevier, Paris.

**double-diffusive convection / porous media / linear stability / spectral method / bifurcation**

**Résumé —** Nous étudions la naissance de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Des flux constants de chaleur et de masse sont imposés sur les parois verticales. Les parois horizontales sont isolées. Lorsque le rapport des forces de volume d'origine solutale et thermique  $N$  est égal à  $-1$ , un régime de double diffusion pure est solution du problème. Ce régime est linéairement stable si le nombre de Rayleigh thermique est inférieur à une valeur critique  $Ra_c$ , fonction du rapport d'aspect de la cellule  $A$  et du nombre de Lewis  $Le$ . Pour une cellule carrée, nous obtenons  $Ra_c|Le - 1| = 209,84$  et, pour une cellule d'extension verticale infinie,  $Ra_c|Le - 1| = 105,33$ , avec un nombre d'onde associé  $k_c = 2,51$ . Ces résultats de stabilité linéaire sont en très bon accord avec ceux obtenus par simulation numérique directe. L'étude numérique montre l'existence de solutions convectives sous-critiques, qui cessent d'exister pour un nombre de Rayleigh thermique  $R_0 < Ra_c$ , fonction du rapport d'aspect de la cellule et du nombre de Lewis. Pour des valeurs du nombre de Rayleigh thermique inférieures à  $R_0$ , seule la solution de double diffusion pure est stable. © Elsevier, Paris.

**convection thermosolutale / milieu poreux / stabilité linéaire / méthode spectrale / bifurcation**

### Nomenclature

$A$  rapport d'aspect ( $= H/L$ )  
 $a$  diffusivité thermique  $a = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f} \dots \dots \dots m^2 \cdot s^{-1}$   
 $C$  concentration adimensionnelle du soluté (fraction massique)

$\Delta C$  différence de concentration caractéristique  $\Delta C = \frac{jL}{D}$   
 $C'_0$  concentration de référence  
 $c$  perturbation de la concentration  
 $D$  diffusivité massique  $\dots \dots \dots m^2 \cdot s^{-1}$   
 $g$  accélération de la pesanteur ( $\vec{g} = -g \vec{e}_y$ )  $\dots \dots \dots m \cdot s^{-2}$   
 $H$  hauteur de la cavité  $\dots \dots \dots m$   
 $j'$  flux de masse constant ( $= j \rho_0$ )  $\dots \dots \dots kg \cdot m^{-2} s^{-1}$   
 $K$  perméabilité du milieu poreux  $\dots \dots \dots m^2$

\* Correspondance et tirés à part.  
 mojtabi@imft.fr

Cet article fait suite à une communication présentée par les auteurs aux 8<sup>es</sup> JITH qui se sont tenues à Marseille du 7 au 10 juillet 1997.

$k$	nombre d'onde	
$k_c$	nombre d'onde critique	
$L$	largeur de la cavité.....	m
$Le$	nombre de Lewis ( $= \frac{a}{D}$ )	
$N$	rapport des forces de volume d'origine solutale et thermique ( $N = \frac{Ra_s}{Ra_T}$ )	
$Nu$	nombre de Nusselt global	
$P$	pression adimensionnelle	
$q'$	flux de chaleur constant.....	$W \cdot m^{-2}$
$Ra_s$	nombre de Rayleigh solutal basé sur $L$ ; $Ra_s = \frac{K g \beta_C (\rho c)_f \Delta C L}{\lambda^* \nu}$	
$Ra_T$	nombre de Rayleigh thermique basé $L$ ; $Ra_T = \frac{K g \beta_T (\rho c)_f \Delta T L}{\lambda^* \nu}$	
$Ra_c$	nombre de Rayleigh thermique critique	
$T$	température adimensionnelle	
$\Delta T$	différence de température caractéristique $\Delta T = \frac{q' L}{\lambda^*}$ .....	K
$T'_0$	température de référence	
$t$	temps adimensionnel	
$U$	composante horizontale adimensionnelle de la vitesse	
$V$	composante verticale adimensionnelle de la vitesse	
$x, y$	coordonnées adimensionnelles	
<i>Symboles grecs</i>		
$\beta_T$	coefficient d'expansion thermique	
$\beta_c$	coefficient d'expansion massique	
$\varepsilon$	porosité normalisée $\varepsilon = \varepsilon' \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)^*}$	
$\varepsilon'$	porosité de la matrice poreuse	
$\lambda^*$	conductivité thermique effective du milieu poreux.....	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$\nu$	viscosité cinématique du fluide.....	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\rho$	masse volumique du fluide binaire.....	$kg \cdot m^{-3}$
$(\rho c)_f$	capacité thermique volumique du fluide	$J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$
$(\rho c)^*$	capacité thermique volumique du fluide fictif représentant le milieu poreux.....	$J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$
$\theta$	perturbation de température	
$\psi$	perturbation de la fonction de courant	
La notation ' indique des grandeurs dimensionnelles.		

## 1. INTRODUCTION

L'étude de la convection thermosolutale en milieu poreux fait actuellement l'objet de nombreux travaux au niveau international. Il s'agit d'étudier les mouvements convectifs induits au sein d'un milieu poreux par un gradient de température et un gradient de concentration. Les mouvements générés par les variations de la masse volumique du fluide saturant en fonction de

la température et de la concentration peuvent être très différents du cas classique de la convection naturelle d'origine thermique [1]. Les applications pratiques correspondantes sont très nombreuses : transport de polluants dans les sols, migration d'humidité dans des fibres isolantes, stockage de déchets radioactifs... Une revue assez complète de ces travaux a été faite par Nield et Bejan [2].

La plupart des études réalisées sur ce sujet concernent des géométries rectangulaires. Trévisan et Bejan [3] ont considéré des conditions aux limites de température et de concentration imposées au niveau des parois verticales, les parois horizontales étant supposées adiabatiques et imperméables. Ils ont identifié, par voie analytique et numérique, de multiples régimes de convection pour des rapports de forces de volume d'origine solutale et thermique,  $N$ , variant de  $-5$  à  $3$ . Dans le cas  $N = -1$ , les auteurs mentionnent l'existence d'une solution purement diffusive si le nombre de Lewis  $Le$  est égal à  $1$ , mais ne trouvent pas cette solution si  $Le \neq 1$ . L'étude de la stabilité de la solution purement diffusive existant pour  $N = -1$  et quel que soit  $Le$ , pour des nombres de Rayleigh thermiques suffisamment faibles, a été reprise par Charrier-Mojtabi et al. [4, 5]. Ces auteurs ont déterminé analytiquement le nombre de Rayleigh critique de la transition solution diffusive-solution convective par une étude de stabilité linéaire. Ils ont ainsi obtenu une relation  $Ra_c |Le - 1| = f(A)$ ,  $A$  étant le rapport d'aspect de la cellule. Pour le cas  $A = 1$ , une étude de stabilité faiblement non-linéaire montre que la bifurcation est transcritique. Ces résultats sont confirmés par une simulation numérique directe. Pour le même type de conditions aux limites, l'étude de stabilité de la solution de diffusion pure, solution du problème pour  $N = -1$ , a aussi été effectuée en milieu fluide par Gobin et al. [6], Xin et al. [7] et a été reprise plus récemment par Ghorayeb et Mojtabi [8].

Pour cette géométrie, de nombreux auteurs ont considéré le cas plus réaliste de flux de chaleur et de masse imposés au niveau des parois verticales. Nous citerons les travaux de Trevisan et Bejan [9] et d'Alavyoon [10]. Dans le cas où les forces de volume solutale et thermique ont des effets opposés, Alavyoon et al. [11] ont mis en évidence l'existence de solutions oscillantes pour des domaines particuliers de variation des paramètres adimensionnels régissant le problème. Pour les solutions convectives stationnaires et des rapports d'aspect assez grands, ils comparent leurs résultats numériques avec les résultats d'une étude analytique effectuée en faisant l'hypothèse d'un écoulement de type parallèle. Dans la même configuration, Mamou et al. [12] ont montré, pour le cas  $N = -1$ ,  $Ra_T = 100$  et  $Le = 10$ , qu'il existe, en plus de la solution purement diffusive, une solution convective. Cependant, ces auteurs n'ont pas procédé à une étude approfondie du cas  $N = -1$ . Mamou et al. [13] ont aussi étudié l'effet de l'inclinaison de la cellule sur la nature des écoulements convectifs.

Dans la présente étude, on considère le cas de la géométrie rectangulaire avec des conditions aux limites

de flux de chaleur et de masse imposées au niveau des parois verticales. On se place dans le cas où le rapport des forces de volume d'origine solutale et thermique,  $N$ , est égal à  $(-1)$ . On effectue une étude de stabilité linéaire de la solution de double diffusion pure, solution du problème pour  $N = -1$ , quel que soit le nombre de Lewis. On analyse l'influence des paramètres géométriques et physiques du problème sur la perte de stabilité linéaire de cette solution. Dans le cas où le principe d'échange de stabilité est supposé satisfait, on trouve, comme pour des conditions aux limites de température et de concentration imposées au niveau des parois verticales, une relation  $Ra_c |Le - 1| = f(A)$ , où  $Ra_c$  désigne le nombre de Rayleigh critique thermique et  $A$  le rapport d'aspect de la cellule. Une étude numérique a été développée dans le but de retrouver les critères d'apparition de la convection thermosolutale, de décrire les écoulements convectifs apparaissant juste après la transition et d'analyser les solutions sous-critiques.

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

On étudie les écoulements bidimensionnels de convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé par un mélange binaire homogène. Les parois verticales de la cellule, de rapport d'aspect  $A$ , sont soumises à des flux horizontaux de masse et de chaleur notés  $j'$  et  $q'$  respectivement. Les parois horizontales sont parfaitement isolées (figure 1). Les équations mathématiques régissant ces écoulements sont basées sur la loi de Darcy et l'hypothèse de Boussinesq pour le fluide saturant. Les variations de la masse volumique  $\rho$  du fluide binaire, en fonction de la température  $T'$  et de la concentration (fraction massique)  $C'$ , sont prises en compte dans le terme générateur de la convection, sous la forme :

$$\rho(T', C') = \rho_0 (1 - \beta_T (T' - T'_0) - \beta_c (C' - C'_0)) \quad (1)$$

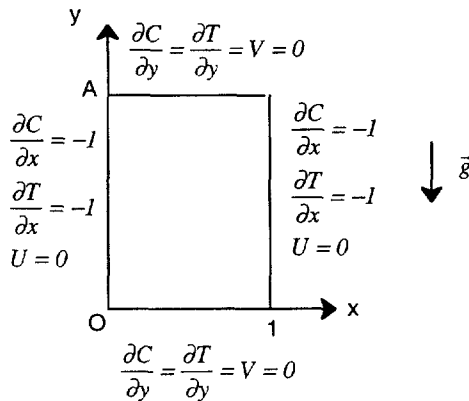


Figure 1. Schéma de définition.

Figure 1. Defining schematic.

Les équations adimensionnelles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de la conservation des espèces et de l'énergie, en l'absence d'effet Soret, s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \vec{V} &= -\nabla P + (Ra_T T + Ra_S C) \vec{e}_y \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla C &= \frac{1}{Le} \nabla^2 C \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T &= \nabla^2 T \end{aligned} \quad (2)$$

Les équations ci-dessus ont été rendues adimensionnelles en considérant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x', y')/L \quad V = \frac{V' L (\rho c)_f}{\lambda^*} \quad t = \frac{\lambda^* t'}{(\rho c)^* L^2} \\ T &= \frac{T' - T'_0}{\Delta T} \quad C = \frac{C' - C'_0}{\Delta C} \\ P &= \frac{P' K (\rho c)_f}{\lambda^* \mu} \quad A = H/L \quad \Delta T = \frac{q' L}{\lambda^*} \quad \Delta C = \frac{j L}{D} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites associées sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = V &= 0 \text{ pour } y = 0, A; \forall x \\ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = -1; U &= 0 \text{ pour } x = 0, 1; \forall y \end{aligned} \quad (3)$$

Ainsi, le problème de la convection thermosolutale dans une couche rectangulaire poreuse dépend de cinq paramètres adimensionnels, qui sont les nombres de Rayleigh thermique et solutal, le nombre de Lewis, la porosité normalisée  $\varepsilon = \varepsilon' \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)^*}$ , où  $\varepsilon'$  désigne la porosité réelle du milieu et le rapport d'aspect  $A$ .

Les échanges thermiques et massiques sont caractérisés respectivement par le nombre de Nusselt global  $Nu$  et le nombre de Sherwood global  $Sh$ , définis par :

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{A}{\int_0^A [T(1, y) - T(0, y)] dy} ; \\ Sh &= \frac{A}{\int_0^A [C(1, y) - C(0, y)] dy} \end{aligned}$$

On se place dans l'hypothèse où le rapport des forces de volume d'origine solutale et thermique  $N = \frac{Ra_S}{Ra_T} = -1$ . Dans ces conditions,  $T = -x + b_1$ ,  $C = -x + b_2$  et  $\vec{V} = 0$  constitue une solution des équations (2) avec les conditions aux limites (3),  $b_1$  et  $b_2$  étant des constantes arbitraires. On se propose d'étudier la stabilité de cette solution de repos correspondant à la double diffusion pure. On notera que dans le cas où  $N \neq -1$ , le problème n'admet pas de solution d'équilibre.

### 3. ANALYSE DE STABILITÉ LINÉAIRE

#### 3.1. Étude dans le cas d'une cellule rectangulaire

La stabilité de la solution de base  $T_0 = -x + b_1$ ,  $C_0 = -x + b_2$  et  $\mathbf{V}_0 = 0$ , obtenue pour  $N = -1$ , est analysée en considérant des perturbations de la vitesse, de la température et de la concentration ( $\mathbf{v}$ ,  $\theta$  et  $c$ ) définies respectivement par :

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0, \quad \theta = T - T_0 \quad \text{et} \quad c = C - C_0$$

On considère des perturbations bidimensionnelles situées dans le plan de l'écoulement. On introduit alors la perturbation de la fonction de courant  $\psi$ , définie par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

On obtient en considérant des perturbations infinitésimales et en ne gardant que les termes du premier ordre, les équations aux perturbations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 \psi + Ra_T \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \nabla^2 \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\nabla^2 c}{Le} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

auxquelles sont associées les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \psi = 0 &\text{ pour } y = 0, A \quad \forall x \\ \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \psi = 0 &\text{ pour } x = 0, 1 \quad \forall y \end{aligned} \quad (5)$$

Les perturbations qui satisfont toutes les conditions aux limites pour une cellule rectangulaire peuvent être développées en double série de Fourier, comme suit :

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{nm} \sin(n\pi x) \sin\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \exp(\sigma t) \\ \theta &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{nm} \cos(n\pi x) \cos\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \exp(\sigma t) \\ c &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} \cos(n\pi x) \cos\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \exp(\sigma t) \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\sigma$  est a priori un nombre complexe.

Dans toute la suite du texte,  $Ra$  désignera  $Ra_T$ .

Dans le cas où l'on suppose applicable le principe d'échange de stabilité, soit  $\sigma \in \mathbb{R}$ , l'état marginal du problème est obtenu pour  $\sigma = 0$ . D'après le système (4), on a alors :  $\Delta \left( \frac{c}{Le} - \theta \right) = 0$ . Compte tenu des conditions aux limites (5), on en déduit qu'au voisinage du point de bifurcation, la solution supercritique vérifie :  $\frac{c}{Le} = \theta + cst$ . En éliminant la concentration dans le système (4), on obtient alors un système du second ordre en  $\psi$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi - Ra(Le - 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Ces équations font apparaître que la stabilité linéaire ne dépend que d'un seul groupement adimensionnel  $Ra(Le - 1)$ , dans le cas où le principe d'échange de stabilité est supposé satisfait. Il serait intéressant de déterminer dans quelle gamme de paramètres adimensionnels le principe d'échange de stabilité est satisfait pour le problème étudié. En effet, dans une étude récente, Karimi-Fard et al. [14] ont montré, pour le problème de la double-diffusion convection dans une cellule rectangulaire avec des températures et des concentrations imposées au niveau de deux des parois, que la bifurcation correspondant à la transition régime de double diffusion pure-régime convectif peut-être, soit stationnaire, soit instationnaire (bifurcation de Hopf), suivant les valeurs de la porosité normalisée  $\varepsilon$  et du nombre de Lewis  $Le$ . De plus, les bifurcations conduisant à des solutions stationnaires sont, soit transcritiques, soit de type fourche, suivant les valeurs du rapport d'aspect et de l'inclinaison.

Le système (7) a été résolu par la méthode de Galerkin, en utilisant le logiciel de calcul symbolique Maple, jusqu'à l'ordre  $(3 \times 3)$ , ce qui correspond à des matrices  $(18 \times 18)$ . Pour des ordres plus élevés, nous avons eu recours à une procédure numérique pour le calcul des déterminants. Pour le cas  $A = 1$ , les calculs ont été effectués jusqu'à l'ordre  $13 \times 13$ , afin de tester la convergence du processus. Pour  $A$  variant de 1.1 à 3, l'ordre le plus élevé considéré est de  $7 \times 14$  ; pour  $A$  variant de 3.1 à 5, il est de  $5 \times 20$  ; pour  $A$  variant de 5,2 à 10, il est de  $5 \times 25$ . Le cas  $Le = 1$  correspond à un régime de double-diffusion pure linéairement stable, quel que soit  $Ra$ . Le tableau I donne le groupement  $Ra_c |Le - 1|$ , où  $Ra_c$  désigne le nombre de Rayleigh thermique critique, en fonction du rapport d'aspect  $A$ , pour différents ordres d'approximation. On constate que lorsque  $A$  augmente, le groupement  $Ra_c |Le - 1|$  tend vers une valeur asymptotique correspondant à la valeur obtenue dans le cas d'une cellule verticale d'extension infinie (cf. § 3.2).

TABLEAU I / TABLE I Nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Lewis $Le$ et du rapport d'aspect $A$ de la cellule. Critical Rayleigh number versus Lewis number $Le$ and the aspect ratio $A$ of the cell.						
$A = 1$	$N \times M$ $Ra_c  Le - 1 $	$5 \times 5$ 210,125	$7 \times 7$ 209,908	$9 \times 9$ 209,860	$11 \times 11$ 209,846	$13 \times 13$ 209,841
$A$ $N \times M$ $Ra_c  Le - 1 $	1,2 $7 \times 14$ 177,86	1,5 $7 \times 14$ 151,77	2 $7 \times 14$ 131,73	2,5 $7 \times 14$ 122,15	3 $7 \times 14$ 117,05	3,5 $5 \times 20$ 114,00
$A$ $N \times M$ $Ra_c  Le - 1 $	4 $5 \times 20$ 111,99	4,5 $5 \times 20$ 110,62	5 $5 \times 20$ 109,63	5,6 $5 \times 25$ 108,77	6 $5 \times 25$ 108,34	6,6 $5 \times 25$ 108,03
$A$ $N \times M$ $Ra_c  Le - 1 $	7 $5 \times 25$ 107,56	7,5 $5 \times 25$ 107,28	8 $5 \times 25$ 107,05	8,5 $5 \times 25$ 106,86	9 $5 \times 25$ 106,70	10 $5 \times 25$ 106,46

### 3.2. Étude dans le cas d'une cellule verticale d'extension infinie

Dans le cas d'une cellule verticale d'extension infinie selon  $y$ , les perturbations de la fonction de courant, de la température et de la concentration sont développées sous la forme :

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\pi x) \exp(\sigma t + iky) \\ \theta &= \sum_{n=1}^N b_n \cos(n\pi x) \exp(\sigma t + iky) \\ c &= \sum_{n=1}^N c_n \cos(n\pi x) \exp(\sigma t + iky)\end{aligned}\quad (8)$$

où  $k$  désigne le nombre d'onde dans la direction infinie  $y$ . En supposant le principe d'échange de stabilité satisfait, pour la recherche de l'état marginal  $\sigma = 0$ , le système (7) est résolu par la méthode de Galerkin pour des valeurs de  $N$  allant jusqu'à 5. Nous avons aussi utilisé, pour la résolution du système (7), la méthode des matrices composées [15]. On trouve que les paramètres critiques satisfont à  $Ra_c |Le - 1| = 105,33$  et  $k_c = 2,51$ . Ce résultat est en bon accord avec les résultats obtenus pour une cellule de grand rapport d'aspect ( $A = 10$ ) (tableau I). On peut noter que les paramètres critiques obtenus en couche verticale infinie sont les mêmes que ceux obtenus pour des conditions de température et de concentration imposées au niveau des parois verticales.

## 4. APPROCHE NUMÉRIQUE

Les équations (2) avec les conditions aux limites (3) ont été résolues en utilisant, d'une part, un code

aux volumes finis [16] et, d'autre part, un code basé sur une méthode spectrale. Dans les deux approches, l'intégration temporelle est réalisée avec le schéma aux différences finies Adams-Bashforth/Euler retardé semi-implicite d'ordre 2. La méthode spectrale utilisée est du type collocation, avec des polynômes de Legendre [17]. Les résultats obtenus par ces deux codes sont en parfait accord entre eux et avec ceux trouvés, entre autre, dans une configuration similaire analysée par Alavyoon et al. [11]. Pour plus de détails concernant ces procédures numériques et les validations avec les résultats d'autres auteurs, nous renvoyons le lecteur à l'article de Charrier-Mojtabi et al. [5].

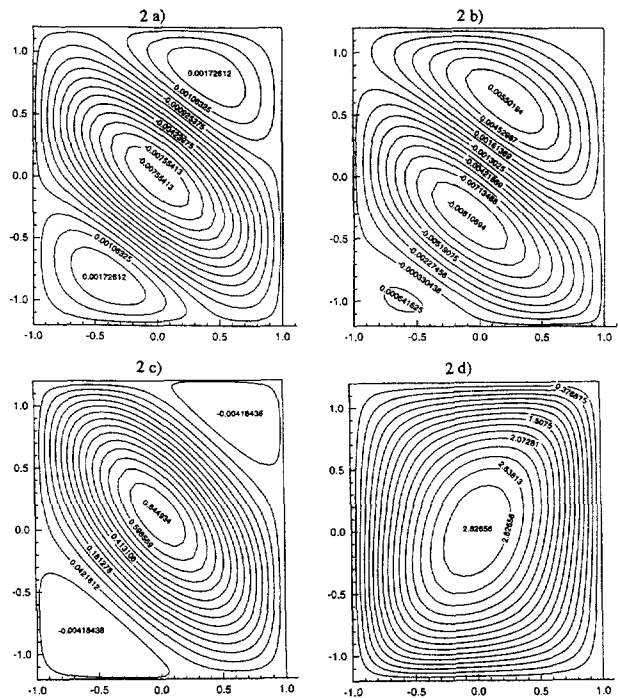
### 4.1. Transition solution conductive-solution convective stationnaire

Dans une première étape, nous nous sommes attachés à la caractérisation, par voie numérique, de la transition solution de double diffusion pure-solution convective stationnaire, pour plusieurs valeurs de  $A$  :  $A = 1$ ,  $A = 1,2$ ,  $A = 1,5$ ,  $A = 2$  et pour  $Le = 2$ . Les résultats obtenus pour la valeur du nombre de Rayleigh critique thermique sont en très bon accord avec ceux déduits de l'étude de la stabilité linéaire.

Cependant, le fait essentiel qui ressort de la recherche du nombre de Rayleigh critique est que quelles que soient les valeurs de  $A$  et de  $Le$  considérées, nous ne captions pas numériquement de solution supercritique, contrairement à ce qui est obtenu pour des conditions aux limites de température et de concentration imposées au niveau des parois verticales dans ce domaine de variation du rapport d'aspect. Si on suit l'évolution au cours du temps de la solution convective qui apparaît juste à la transition lorsque la solution de double-diffusion perd sa stabilité, on observe, pour tous les cas numériques considérés, pratiquement la même évolution, représentée

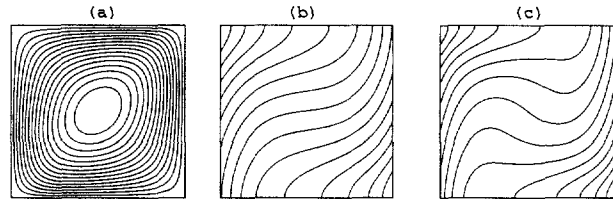
sur la *figure 2* pour  $A = 1,2$ ,  $Le = 2$ ,  $N = -1$ . On obtient d'abord une solution convective centro-symétrique à 3 cellules, avec une grosse cellule centrale et deux petites cellules contrarotatives dans deux coins opposés de la cavité poreuse (*figure 2a*). L'écoulement évolue ensuite vers un régime à 2 cellules contrarotatives emplissant l'ensemble de la cavité (*figure 2b*), puis, de nouveau, 3 cellules convectives apparaissent (*figure 2c*), avec la cellule centrale qui tourne en sens inverse du cas (a). Cet écoulement disparaît très vite, pour laisser place à un écoulement monocellulaire, avec une seule cellule emplissant l'ensemble de la cavité (*figure 2d*). Sur la *figure 3*, on a reporté les lignes de courant (a), les isothermes (b) et les iso-concentrations (c) pour le régime monocellulaire stable obtenu à la transition dans le cas  $A = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = -1$ . On est alors sur une autre branche de solution (branche 2) du diagramme donnant les variations du nombre de Nusselt global en fonction de  $Ra$ , présenté pour le cas où  $A = 1$ ,  $Le = 2$  et  $N = -1$  sur la *figure 4*.

La nature de la bifurcation n'est donc pas identifiée et son étude mérite un développement qui sera effectué à la suite du présent travail. Cependant, l'évolution temporelle présentée sur la *figure 2*, pour  $A = 1,2$ ,  $N = -1$  et  $Le = 2$ , est en bon accord avec l'étude de stabilité linéaire.



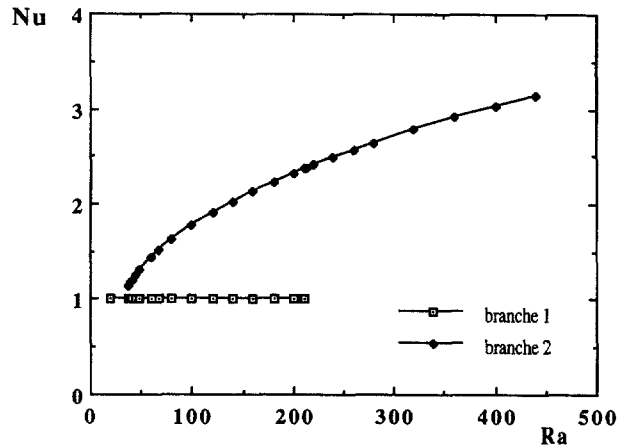
**Figure 2.** Évolution temporelle de la solution convective au seuil d'apparition :  $A = 1,2$ ,  $Le = 2$  et  $N = -1$ .

**Figure 2.** Time evolution of the convection motion at onset:  $A = 1,2$ ,  $Le = 2$ , and  $N = -1$ .



**Figure 3.** Lignes de courants (a); isothermes (b); iso-concentrations (c).  $A = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = -1$  et  $Ra_T = 210$ .

**Figure 3.** Streamlines (a); isotherms (b); concentrations lines (c).  $A = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = -1$ , and  $Ra_T = 210$ .



**Figure 4.** Nombre de Nusselt global en fonction du nombre de Rayleigh thermique pour  $A = 1$ ,  $Le = 2$  et  $N = -1$ .

**Figure 4.** Global Nusselt number versus the thermal Rayleigh number for  $A = 1$ ,  $Le = 2$ , and  $N = -1$ .

En effet, pour toutes les valeurs de  $A$  considérées dans la présente étude, on constate que l'annulation du déterminant issu du système (7) conduit toujours à des valeurs propres d'ordre de multiplicité 2. La recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre d'ordre de multiplicité 2 montre qu'il existe toujours deux vecteurs propres distincts associés. On peut ainsi tracer, pour la plus petite des valeurs propres, la perturbation  $\psi$  de la fonction de courant, en considérant différentes combinaisons linéaires de ces deux vecteurs propres (*figure 5*) pour  $A = 1,2$  et  $N = -1$ . On constate que les solutions convectives stationnaires, susceptibles de se développer après la transition, sont similaires à celles obtenues numériquement en suivant l'évolution temporelle de la solution qui prend naissance à la transition (*figure 2*). Le point de bifurcation obtenu est un point de co-dimension 2. La nature de la bifurcation diffère donc de celle obtenue pour des conditions de température et de concentration imposées au niveau des parois verticales, celle-ci étant transcritique pour des valeurs de  $A$  comprises entre  $A = 1$  et  $A = 2,1$ . Dans ce dernier cas, la branche de solution supercritique issue de la bifurcation transcritique est stable.

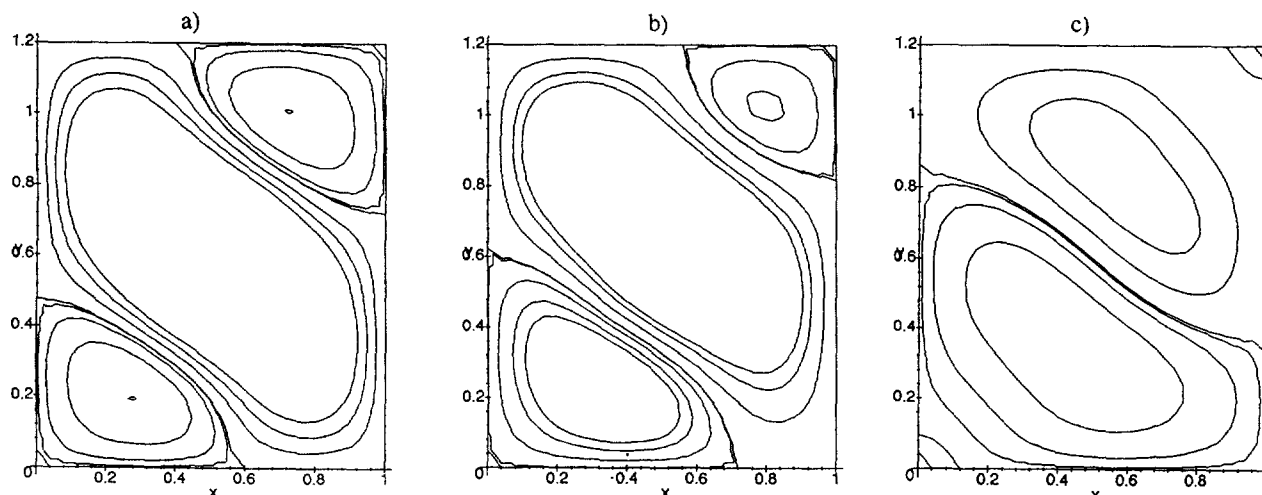


Figure 5. Différentes solutions convectives susceptibles d'apparaître à la transition, obtenues analytiquement, pour  $A = 1,2$  et  $N = -1$ .

Figure 5. Analytical convective steady states which may appear at onset for  $A = 1.2$  and  $N = -1$ .

#### 4.2. Analyse des solutions sous-critiques

En diminuant la valeur du nombre de Rayleigh à partir de  $Ra_c$ , tout en restant sur la branche 2 de solution (figure 4), on constate que la solution reste monocellulaire et devient sous-critique. Cette solution sous-critique transite de manière discontinue, avec un saut du nombre de Nusselt global, vers la solution de double diffusion pure, pour une valeur du nombre de Rayleigh thermique  $R_0 < Ra_c$ .  $R_0$  est le nombre de Rayleigh correspondant au point tournant. Pour des valeurs du nombre de Rayleigh thermiques inférieures à  $R_0$ , seule la solution de double diffusion pure est stable.

L'étude de l'évolution de la valeur de  $R_0$  en fonction du paramètre  $(Le - 1)$  et de  $A$ , pour  $Le$  variant de 1,5 à 20 et pour  $A = 1$  et  $A = 2$  (tableau II), montre que celui-ci vérifie une relation du type :

$$R_0 = C_1/(Le - 1) + C_2$$

les constantes  $C_1$  et  $C_2$  diminuant avec le rapport d'aspect  $A$ . Ces variations sont reportées sur la figure 6. Pour  $A = 1$ , ces constantes valent  $C_1 = 38,23$  et  $C_2 = 0,83$  ; pour  $A = 2$ , on obtient :  $C_1 = 32,83$  et  $C_2 = 0,385$ .

Une étude numérique plus complète qui serait développée en faisant varier le rapport d'aspect  $A$  sur une large gamme, ainsi que le nombre de Lewis, nous permettrait de préciser le domaine de validité des corrélations présentées ci-dessus.

TABLEAU II / TABLE II			
Nombre de Rayleigh $R_0$ correspondant au «point tournant» en fonction du nombre de Lewis $Le$ et du rapport d'aspect $A$ de la cellule.			
Rayleigh number $R_0$ which corresponds to the 'turning point' versus the Lewis number $Le$ and the aspect ratio $A$ of the cell.			
$Le$	$1/(Le - 1)$	$R_0$ pour $A = 1$	$R_0$ pour $A = 2$
1,5	2	77,2	66,0
2	1	39,0	33,2
3	0,5	20,2	16,8
4	0,33	13,8	11,4
5	0,25	10,6	8,6
11	0,1	4,44	3,6
20	0,053	2,40	1,94

#### 5. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article une étude permettant de prédire la naissance de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois verticales de la cavité sont soumises à des flux constants de chaleur et de masse. On se place dans le cas où le rapport des forces de volume d'origine solutale et thermique est égal à  $-1$ . On étudie la stabilité

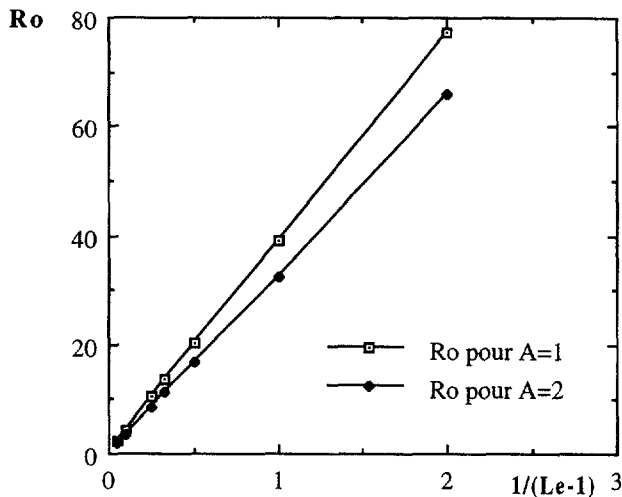


Figure 6. Nombre de Rayleigh  $R_0$  correspondant au «point tournant» en fonction de  $1/(Le-1)$  pour  $A=1$  et  $A=2$ .

Figure 6. Rayleigh number  $R_0$  corresponding to the 'turning point' versus  $1/(Le-1)$  for  $A=1$  and  $A=2$ .

linéaire de la solution de double diffusion pure, solution du problème dans ce cas, en supposant applicable le principe d'échange de stabilité. Nous obtenons une relation liant le nombre de Rayleigh critique thermique, le nombre de Lewis et le rapport d'aspect de la cellule,  $Ra_c|Le-1| = f(A)$ , pour  $A$  variant de 1 à l'infini. Les résultats de cette étude analytique sont comparés avec ceux obtenus à l'aide d'une étude numérique. Cette dernière étude nous permet de retrouver avec un très bon accord les valeurs de  $Ra_c$  obtenues par l'étude de stabilité linéaire, pour plusieurs valeurs du rapport d'aspect. On montre numériquement que, pour  $A$  compris entre 1 et 2, la branche de solution issue de la bifurcation est instable et que la solution transite vers une branche de solution sous-critique de type monocellulaire. La nature de la bifurcation n'a pas été identifiée et son étude doit être développée. En ce qui concerne les solutions sous-critiques, nous avons établi une corrélation liant le nombre de Rayleigh  $R_0$ , pour lequel la solution sous-critique transite de manière discontinue vers la solution de double-diffusion pure, au nombre de Lewis, et ceci pour différents rapports d'aspect.

### Remerciements

Les auteurs remercient le centre de calcul de Montpellier (CNUSC) pour son support financier.

### RÉFÉRENCES

- [1] Combarous M., Bories S., Hydrothermal convection in saturated porous media, in : *Advance in Hydrosience*, Academic press, 1975, pp. 231-307.
- [2] Nield D.A., Bejan A., *Convection in porous medium*, Springer-Verlag, 1992.
- [3] Trevisan O., Bejan A., Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Trans.* 28 (8) (1985) 1597-1611.
- [4] Charrier-Mojtabi M.-C., Karimi-Fard M., Mojtabi A., Naissance de régimes de convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse, *C. R. Acad. Sci. Paris, série II* 324 (1997) 9-17.
- [5] Charrier-Mojtabi M.-C., Karimi-Fard M., Azaiez M., Mojtabi A., Onset of a double diffusive convective regime in a rectangular porous cavity, *J. Porous Media* 1 (1) (1998) 107-121.
- [6] Gobin D., Bennacer R., Double diffusion in a vertical fluid layer : Onset of the convective regime, *Phys. Fluids* 6 (1) (1994) 59-67.
- [7] Xin S., Le Quéré P., Tuckerman L., Double-diffusion in a square cavity: on the nature of the bifurcation at convection onset, *Notes Limsi*, 07/1996.
- [8] Ghorayeb K., Mojtabi A., Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity, *Phys. Fluids* 9 (1997) 2339-2348.
- [9] Trevisan O., Bejan A., Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous medium, *Int. J. Heat Mass Trans.* 29 (3) (1986) 403-415.
- [10] Alavyoon F., On natural convection in vertical porous enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries, *Int. J. Heat Mass Trans.* 36 (10) (1993) 2479-2498.
- [11] Alavyoon F., Masuda Y., Kimura S., On natural convection in vertical porous enclosures due to opposing fluxes of heat and mass prescribed at the vertical walls, *Int. J. Heat Mass Trans.* 37 (2) (1994) 195-206.
- [12] Mamou M., Vasseur P., Bilgen E., Multiple solutions for double-diffusive convection in a vertical porous enclosure, *Int. J. Heat Mass Trans.* 38 (10) (1995) 1787-1798.
- [13] Mamou M., Vasseur P., Bilgen E., Gobin D., Double-diffusive convection in an inclined slot filled with porous medium, *Eur. J. Mech. B-Fluid.* 14 (5) (1995) 629-652.
- [14] Karimi-Fard M., Charrier-Mojtabi M.-C., Mojtabi A., Analytical and numerical simulation of double-diffusive convection in a tilted cavity filled with a porous medium, 11th International Heat Transfer Conference, Séoul, 08/1998.
- [15] Drazin R.G., Reid W.H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 1981.
- [16] Patankar S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, London, 1980.
- [17] Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T., *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, New-York, 1988.



## Abridged English Version

Onset of double-diffusive convection in a rectangular porous cavity  
submitted to heat and mass fluxes at the vertical walls

Relatively few works have been devoted to double-diffusive convection in a porous medium, whereas natural convection has been widely studied. Recently, the double-diffusive convection in enclosures have received particular attention due to its numerous fundamental and industrial applications. Migration of moisture in fibrous insulation, transport of contaminants in saturated soil, drying processes, etc. are some examples of interest. Nield and Bejan [2] have summarized the current state of knowledge concerning convection in a porous medium saturated by a binary fluid. Previous studies have been concerned with the case of vertical cells with either imposed temperatures and concentrations along the vertical side-walls [3–5] or heat and mass fluxes across the vertical side-walls [9, 11–13]. For both of these boundary conditions, a purely diffusive solution (motionless) is a solution to the problem when the ratio of the solutal to the thermal buoyancy forces  $N$  is equal to  $(-1)$ . Charrier-Mojtabi et al. [5] demonstrated for the case of temperatures and concentrations imposed on the vertical walls that the purely diffusive regime, which exists for  $N = -1$  at any Lewis number, is linearly stable up to a critical thermal Rayleigh number,  $Ra_c$ , which depends on the box aspect ratio  $A$ , and the Lewis number  $Le$ . The authors conducted a weakly non-linear analysis and established that the first primary bifurcation is transcritical for  $A = 1$ . For the same boundary conditions, double-diffusive convection studies have been carried out in a fluid medium, for the case  $N = -1$ , by Gobin and Bennacer and others [6–8].

The aim of the present work was to analyze the linear stability of a purely diffusive solution in a rectangular or infinite vertical cell for the case  $N = -1$  with heat and mass fluxes applied to the vertical walls. The analytical results are compared to those obtained by direct numerical simulations.

The problem of double diffusive convection in a rectangular porous cavity depends on five non-dimensional parameters (the thermal and solutal Rayleigh numbers,  $Ra_T$  and  $Ra_S$ , respectively, the Lewis number,  $Le$ , the normalized porosity,  $\varepsilon$  and the aspect ratio of the cell,  $A$ ). The problem is formulated using Darcy's law and the Boussinesq approximation for the binary fluid whose density depends linearly on both the local temperature and concentration (equation (1)). The dimensionless 2D equations for the conservation of mass, momentum, chemical species and energy where the Soret effect is neglected are respectively given by equations (2) and the boundary conditions are expressed by equations (3).

We considered the stability analysis of the equilibrium solution when  $N = Ra_S/Ra_T = -1$ . We assumed that the perturbation quantities ( $\psi, \theta, c$ ) are infinitesimal, then we obtained the linearized equations (4). The perturbations satisfying all the boundary conditions may be expanded into double Fourier series as equations (6).

Then we assumed that the principle of exchange of stability was valid, and the marginal state is obtained for  $\sigma = 0$ . Thus the steady state disturbances are solutions of equations (7). One can observe that only one non-dimensional stability parameter,  $Ra(Le - 1)$ , appears in these equations. The Galerkin technic is used to solve these equations. For low orders of approximation, a symbolic algebra code (Maple) is used. We have also found numerically the critical Rayleigh number for higher orders. Table I gives the critical Rayleigh number versus  $A$ , for different orders of approximation. This table shows that for a large aspect ratio, the convergence needs high orders of approximation. For an infinite vertical porous layer, the perturbations are given by equations (8) where  $k$  corresponds to the wavenumber in the  $y$  direction. When the principle of exchange of stability is assumed valid, the values of critical wavenumber and critical Rayleigh number obtained are, respectively,  $k_c = 2.51$  and  $Ra_c|Le - 1| = 105.33$ , which is in good agreement with the results given in table I. The compound matrix method has also been used to solve equations (7) for the case of an infinite vertical cell.

Two numerical models, one using a spectral collocation method and a second one using a finite volume method, have been performed. The time scheme used to solve equations (2) with boundary conditions (3) in the two procedures is a second order Adams-Bashforth Euler backward scheme. The results obtained for  $A = 1, 1.2, 1.5$  and  $A = 2$  and  $Le = 2$  are in good agreement with the linear stability analysis ( $Ra_c|Le - 1| = 209.8$  for  $A = 1$ ). For all the studied cases, the direct numerical simulation shows that the branch of convective solution created at the bifurcation point is unstable. Figure 2 indicates the time evolution of the convective solution at the onset. The stable steady state reached is characterized by one cell in all the cavity (figure 3). The linear stability analysis shows that the bifurcation point is a codimension-two bifurcation point. The perturbation of the stream-function drawn for different linear combinations of the two eigenvectors associated to the same eigenvalue (figure 5) gives the possible steady state solutions at the onset of convection. These solutions correspond to those observed during the time evolution of the numerical simulation presented in figure 2.

By decreasing the Rayleigh number from  $Ra_c$  on the subcritical branch 2 (figure 4), the structure of the convective motion remains monocellular until  $R_0 < Ra_c$ , point from which the solution returns discontinuously to the purely diffusive solution.  $R_0$  corresponds to the 'turning point'. A correlation giving  $R_0$  as function of the Lewis number is given for two values of the aspect ratio  $A = 1$  and  $A = 2$  (figure 6) and for  $Le$  varying between 1.5 and 20.